Ueber die

Querschwingungen von Röhren.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Ludwig Chr. Th. Heuser
aus Marburg.

MARBURG.
Druck von C. L. Pfeil.
1884.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Franz Melde

in

Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Mit der Untersuchung der beim Querschwingen von Stäben auftretenden Verhältnisse haben sich seit etwa der Mitte des vorigen Jahrhunderts einige unserer bedeutendsten Gelehrten beschäftigt. *Daniel Bernoulli*[1]) war der Erste, der sich die Untersuchung der schwingenden Stäbe zur Aufgabe machte; ihm folgten *Euler*[2]), *Riccati*[3]), *Chladni*[4]), *Poisson*[5]), *Cauchy*[6]) und *Strehlke*[7]). Um die Mitte unseres Jahrhunderts nahm *A. Seebeck*[8]) die früher mit mehr oder weniger Erfolg gekrönten Untersuchungen wieder auf und behandelte den Gegenstand theoretisch und experimentell sowohl für runde als auch für parallelepipedische Stäbe in sehr erschöpfender Weise. Nach ihm hat sich noch einmal der französische Forscher *Lissajous*[9]), augenscheinlich ohne von *Seebecks* Untersuchungen Kenntniss gehabt zu haben, mit den bei transversal schwingenden Stäben auftretenden Verhältnissen beschäftigt, ist aber mit seinen Resultaten nicht soweit gediehen wie sein Vorgänger.

---

1) Comment. Acad. Petrop. T. XIII. „De vibrationibus et sono laminarum elasticarum."

2) Acta Acad. Scient. Imp. Petrop. 1779. (I, 103).

3) Mem. di matem. e fisica d. Soc. Ital. Bd. I. „Delle vibrationi sonore dei cylindri."

4) *Chladni*, „Entdeckungen über die Theorie des Klanges."

5) Mém. de l'Akadémie. 1828. VIII.

6) Exerc. de Math. III, 270 fg.

7) Pogg. Ann. XXVII, 505 fg. „Ueber die Lage der Schwingungsknoten auf elastischen, geraden Stäben, welche transversal schwingen, wenn beide Enden frei sind."

8) Berichte der Math. Phys. Classe der Königl. sächs. Ges. d. Wissensch. I. „Über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe."

9) Ann. de chim. et de phys. 3me sér. t. XXX, 385 fg. „Mémoire sur la position des nœuds dans les lames qui vibrent transversalement."

Der weiteren Frage, in wiefern und ob überhaupt die *Röhren* beim Querschwingen dieselben Gesetze befolgen, wie die Stäbe, ist, soviel mir bekannt, bis jetzt noch Niemand näher getreten. Herr Prof. Dr. *Melde* machte in seiner Akustik [10]) (pag. 151 u. 152) auf diesen Umstand aufmerksam und empfahl gleichzeitig noch eine Anzahl hierhergehöriger Fragen, mit deren Beantwortung ich mich im Folgenden beschäftigen werde.

Von den sechs Fällen, welche *Seebeck* in seiner Untersuchung über die Querschwingungen von elastischen Stäben für „nicht gespannte Stäbe" je nach der Befestigung resp. Unterstützung derselben unterschied [11]), ist besonders derjenige von Interesse, bei welchem beide Enden des Stabes frei sind. Das freie Schwingen und Tönen desselben wird durch zwei oder mehrere Kork- oder Filz-Unterlagen ermöglicht, welche jedesmal in oder nahe bei einem Schwingungsknoten anzubringen sind. Es kommt hierbei im Grunde genommen nicht sonderlich darauf an, dass diese Unterstützung des Stabes genau in einem Knotenpunkte geschieht, da dieselbe eigentlich nur die Bildung eines Schwingungsbauches an der fraglichen Stelle verhindert, indessen ist es doch von Vortheil die Unterstützungspunkte möglichst genau in einem Knoten zu wählen, weil hierdurch die Schwingungen und das Tönen des Stabes bedeutend intensiver werden.

Ich habe nun im Verfolge meiner Arbeit zunächst noch einmal kurz untersucht, in wieweit *Seebecks* Berechnung der Lage der Schwingungsknoten mit der Beobachtung derselben bei einem schwingenden Messingstab übereinstimmt, und, nachdem ich hier eine völlige Bestätigung seiner Theorie gefunden, diese Beobachtung an verschiedenen Röhren wiederholt.

---

10) *Melde.* Akustik. Leipzig. 1883. *F. A. Brockhaus.*

11) Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. W. I. pag. 139. „Nach diesen Bedingungen sind nun die sechs Fälle, welche vorkommen können, zu behandeln, nämlich:

1. ein Ende eingeklemmt, das andere frei;
2. beide Enden frei;
3. beide Enden eingeklemmt;
4. ein Ende angestemmt, das andere frei;
5. ein Ende angestemmt, das andere eingeklemmt;
6. beide Enden angestemmt."

Wie bei den Stäben liessen sich auch bei den schwingenden Röhren obige sechs Fälle unterscheiden und demgemäss behandeln; meine Untersuchungen berücksichtigen indessen nur den zweiten derselben, wobei beide Enden frei sind, als den wohl am häufigsten vorkommenden. Ich begann meine Beobachtungen an Glasröhren, da sich dieselben am leichtesten beschaffen liessen, und zwar mit der Bestimmung der Lage der Schwingungsknoten.

Um die Schwingungsknoten bei Glasröhren sichtbar zu machen, kann man in sehr verschiedener Weise verfahren. Erstens wird man, wie dies besonders bei den *Chladni*'schen Klangscheiben oder bei tönenden Lamellen geschieht, trocknen Quarzsand benutzen können, den man im Innern der Röhre gleichmässig und dünn vertheilt. Eigenthümlich bei diesem Versuch ist nun die Erscheinung, *dass der Sand sich nicht wie bei den erwähnten Klangfiguren an den Stellen der Schwingungsknoten anhäuft, sondern dass er sich beiderseits von den Knoten hinwegbewegt und an den Stellen der stärksten Schwingung heftig aufwirbelt.* Durch sorgfältige Beobachtung dieser Bewegung des Sandes lässt sich die Lage der Schwingungsknoten vollkommen genau bestimmen. Ein zweites, sehr empfehlenswerthes Mittel für genannten Zweck sind die Reiterchen[12]) von Draht, in der Form der häufig bei Kleidern benutzten Ösen. Dieselben werden über die Röhre gehängt und dienen zur Bestimmung der Schwingungsknoten auf der äusseren Oberfläche; um bei heftigem Schwingen der Röhre ein Umkippen und Abfallen derselben zu verhindern, werden ihre Enden mit einem Tropfen Colophonium-Wachs-Kitt beschwert. — Auf eine schwingende Röhre aufgesetzt, bewegen sich diese Drahtreiterchen, wenn sie einigermassen sorgfältig angefertigt sind, von beiden Seiten auf die Knoten zu; tritt einmal der entgegengesetzte Fall ein, so braucht man den Reiter nur umzudrehen, und er wird sich sofort der betreffenden Knotenstelle nähern. Die Bestimmung mit Hilfe dieses Mittels ist sehr genau. Ferner kann man zur Sichtbarmachung der Knotenlagen Flüssigkeiten benutzen, und zwar sowohl von innen wie von aussen. Bringt man eine Quantität Flüssigkeit in eine tönende Röhre, so bleibt sie nur an den Knotenstellen ruhig, während an den Schwingungsbäuchen

12) Vergl. *Melde*, Akustik, pag. 150. Fig. 30.

die Oberfläche durch Querriefen gefurcht wird. Diese Erscheinung zeigt sich um so schöner und interessanter, je weniger hoch die angewandte Flüssigkeit den Boden der Röhre bedeckt. Ähnlich sind die Erscheinungen, wenn eine Flüssigkeit in einem Blechtroge die tönende Röhre aussen bis zu einer gewissen Höhe berührt.

Von den hier aufgeführten Methoden zur Sichtbarmachung und Bestimmung der Schwingungsknoten wendete ich bei meinen Versuchen die mit Hilfe der Drahtreiterchen an, theils weil mir dieselbe als die bequemste und genauste erschien, theils auch, weil sie später bei der Untersuchung der Messingröhren beibehalten werden konnte.

Um die Röhren in Schwingungen zu versetzen, wendete ich ein in der Akustik vielfach bewährtes Hilfsmittel in der Form eines dünnen Stäbchens von Glas, ein sogenanntes Streichstäbchen an, welches ich, um alle Töne zu erhalten, nicht in der Mitte der Röhre, sondern an einem Ende derselben ankittete. — Als Unterlagen dienten mir auf Holz befestigte, mit einem rundlichen Ausschnitt zur Aufnahme der Röhren versehene Scheiben von etwa 5 Millimeter dickem Filz, dessen Kanten noch etwas zugeschärft waren. — Um eine möglichst genaue Abmessung bei den Schwingungsknoten zu erzielen habe ich schliesslich jede Röhre an beiden Enden abgeschliffen. Die Messung des Abstandes der nahe an den Enden gelegenen Knoten von diesen führte ich mit einem in Millimeter getheilten und mit Nonius versehenen Stangenzirkel aus; wo dieser wegen der Länge der Röhren nicht mehr ausreichte, benutzte ich einen auf Holz getheilten, genauen Millimetermassstab, und schätzte die Zehntel-Millimeter nach dem Augenmass ab. — In gleicher Weise wie bei den Glasröhren verfuhr ich bei den später untersuchten Messingröhren.

Ich gebrauchte oben den Ausdruck „um alle Töne zu erhalten“ und bemerke hierzu Folgendes, das wohl auch zum Verständniss der in den später anzuführenden Tabellen gebrauchten Bezeichnungen Beachtung verdient. Ein transversal schwingender Stab, auf welchen die erwähnte Art der Bezeichnung von *Seebeck* zunächst angewendet wurde, giebt seinen Grundton, wenn er mit zwei Knoten, den ersten Oberton, wenn er mit drei Knoten schwingt, u. s. w. Den Grundton nennt nun *Seebeck* den Ton 1, den ersten

Oberton den Ton 2, den zweiten den Ton 3, u. s. w. Demgemäss hat

der Ton 1 . . . . . 2 Schwingungsknoten
„ „ 2 . . . . . 3 „
„ „ 3 . . . . . 4 „
„ „ „ „ „
„ „ n . . . . . $n+1$. „

Nun sieht man aber leicht ein, dass bei den geraden, d. h. bei den mit einer ungeraden Anzahl von Schwingungsknoten schwingenden Tönen einer derselben sich in der Mitte des Stabes bilden muss, während bei den ungeraden Tönen, die eine gerade Anzahl von Knoten bilden, an dieser Stelle ein Schwingungsbauch zu Stande kommt. Würde man also das Streichstäbchen in der Mitte des Stabes anbringen, so erhielte man nur die ungeraden Töne, wenn man diese Bezeichnung beibehalten will. Am Ende kann sich bei einem *frei = freien*[13]) Stab unter keinen Umständen ein Knoten bilden, sondern dasselbe ist stets in Bewegung; wählt man daher dieses zum Befestigungspunkt für das Streichstäbchen, so können alle Töne, gerade und ungerade zu Stande kommen.

Lage der Schwingungsknoten bei homogenen Stäben.

Wie schon oben bemerkt, habe ich vorliegender Arbeit die Untersuchung *Seebecks* zu Grunde gelegt und theile daher zunächst die von ihm für frei = freie Stäbe angegebene Tabelle der Knotenlagen hier mit, weil ich stets wieder darauf zurückkommen muss. Dieselben brauchen, wie er selbst angiebt, nur für die eine Hälfte des Stabes berechnet zu werden, da sie sich symmetrisch zur Mitte bilden.

Tabelle I.

	ε	Entfernung der Knoten vom nächsten freien Ende. erster	zweiter	dritter	k^{ter}
erster Ton	1,50562.	0,2242	—	—	—
zweiter Ton	2,49975.	0,1321	0,5000	—	—
dritter Ton	3,50001.	0,0944	0,3558	—	—
i^{ter} Ton	$2i+1$	1,3222	4,9820	9,0007	$4k-3$
	2	$4i+2$	$4i+2$	$4i+2$	$4i+2$

13) „frei = frei“ gleich „an beiden Enden frei.“ Vergl. *J. W. Strutt*, Baron *Rayleigh*, „Die Theorie des Schalles“, übersetzt von *Neesen*, I, 284 ff.

Die angegebeneu Zahlen gelten für einen Stab von der Längeneinheit, gleichviel welchen Querschnitt er habe; um also die wahre Lage der Knoten zu erhalten, sind dieselben noch mit der wirklichen Länge des Stabes zu multipliciren.

Bezüglich der historischen Bedeutung der Zahlen bemerkt *Seebeck* in seiner Abhandlung[14]) Folgendes:

„Es sind dies jene Zahlen, welche zuerst in einer unvollkommenen Annäherung von *D. Bernoulli,* nachher genauer von *Riccati,* sowie von *Strehlke* berechnet und von dem Letzteren mit einer grossen Anzahl sehr genauer Messungen verglichen worden sind. Jedoch kommt in diesen letzteren, sonst sehr genauen Rechnungen ein Versehen in einem Vorzeichen bei den geraden Knoten vor, welches besonders beim zweiten Knoten einen merklichen Einfluss übt. Berichtigt man dasselbe, so differiren *Strehlkes* Messungen noch bedeutend weniger von der Rechnung als dies bei seinen Rechnungsangaben der Fall ist — ein gutes Kennzeichen für die Zuverlässigkeit der mitgetheilten Beobachtungen."

Zur Bestimmung der Schwingungsknoten benutzte ich einen runden Messingstab von nahezu 16 Millimeter Durchmesser und 1002 Millimeter Länge. Die Beobachtung ergab folgende Zahlen:

Tabelle II.

		Entfernung der Knoten vom linken Ende.						
Ton 6.	berechnet	51,0	192,0	346,8	501,0	655,2	810,0	951,0
	beobachtet	50,8	191,4	346,5	500,8	654,8	810,6	950,5
	Differenz	+0,2	+0,6	+0,3	+0,2	+0,4	−0,6	+0,5
Ton 5.	berechnet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8	—
	beobachtet	59,7	226,3	409,5	591,8	774,5	941,3	—
	Differenz	+0,5	+0,6	+0,4	+0,3	+0,6	+0,5	—
Ton 4.	berechnet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—	—
	beobachtet	73,0	276,9	501,1	724,2	927,8	—	—
	Differenz	+0,6	+0,5	−0,1	+0,4	+0,6	—	—
Ton 3.	berechnet	94,6	356,6	645,5	907,4	—	—	—
	beobachtet	94,3	356,3	645,5	907,4	—	—	—
	Differenz	+0,3	+0,3	−0,1	0,0	—	—	—

In dieser Tabelle geben die oberen Zahlen die nach *Seebecks* Untersuchung berechneten Lagen der Schwingungsknoten

14) Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch. I, 145.

bei Stäben an, während die zweite Zahlenreihe die beobachteten Knotenlagen bezeichnet; die dritte Reihe giebt die Abweichung der Beobachtungen von den Berechnungen nach der einen oder anderen Seite. Diese Anordnung wird auch bei allen späteren Tabellen beibehalten und es ist stets zu beachten, dass die obere Reihe die wirkliche Lage der Schwingungsknoten bei regelmässigen cylindrischen Stäben angiebt und mit Hilfe der Tabelle I. berechnet ist. Zur besseren Uebersicht endlich sind die Abstände der Schwingungsknoten durchgehends vom linken Ende aus genommen, während sich bei allen Versuchen das Streichstäbchen am rechten befindet.

Aus obiger Vergleichung der berechneten mit den beobachteten Knotenlagen ergiebt sich, dass die letzteren von ersteren um höchstens 0,6 Millimeter abweichen, welches Resultat als eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen dem Experiment und der Rechnung angesehen werden kann.

Lage der Schwingungsknoten bei homogenen Röhren.

Zur Beobachtung der Lage der Schwingungsknoten bei möglichst homogenen *Röhren* benutzte ich vier Messingröhren [15]) von verschiedenem Querschnitt und der ungefähren Länge von 1000 Millimeter. Die Röhren I, III und IV waren rund, theils gezogen ohne Naht, theils auch gelöthet; die Röhre II war sechskantig, mit sechs Längsrillen versehen. Die Lage der Knoten beobachtete ich nur bei den Tönen 3, 4 und 5, weil höhere Töne schwieriger zu Stande kamen. Die Resultate der Beobachtungen, verglichen mit den berechneten Knotenlagen, waren folgende:

Tabelle III.

Röhre I. Länge = 1004,5 Mm. Durchmesser = 11,2 Mm. Wandstärke = 1,3 Mm.

Ton 5.	berechnet	60,4	227,5	410,9	593,6	777,0	944,1
	beobachtet	60,6	227,5	411,4	594,0	777,3	944,9
	Differenz	−0,2	0,0	−0,5	−0,4	−0,3	−0,8
Ton 4.	berechnet	73,8	278,0	502,2	726,5	930,7	—
	beobachtet	73,7	278,3	502,7	727,1	930,1	—
	Differenz	+0,1	−0,3	−0,5	−0,6	+0,6	—
Ton 3.	berechnet	94,8	357,5	647,0	909,7	—	—
	beobachtet	95,1	357,4	647,7	909,3	—	—
	Differenz	−0,3	+0,1	−0,7	+0,4	—	—

15) Dieselben waren angefertigt von der Firma *Albert Hahn*, Röhrenwalzwerk, Berlin.

Röhre II.

Länge = 1003,0 Mm. Grösster Durchmesser = 11,2 Mm.

Ton 5.	berechnet	60,3	227,2	410,3	592,7	775,8	942,7
	beobachtet	60,2	227,1	410,3	592,3	775,9	942,7
	Differenz	−0,1	+0,1	0,0	+0,4	−0,1	0,0
Ton 4.	berechnet	73,7	277,6	501,5	725,4	929,3	—
	beobachtet	73,4	277,3	501,4	725,8	929,6	—
	Differenz	+0,3	+0,3	+0,1	−0,4	−0,3	—
Ton 3.	berechnet	94,7	357,0	646,0	908,3	—	—
	beobachtet	94,4	356,9	646,5	908,7	—	—
	Differenz	+0,3	+0,1	−0,5	−0,4	—	—

Röhre III.

Länge = 1002,0 Mm. Durchmesser = 18,4 Mm.
Wandstärke = 0,9 Mm.

Ton 5.	berechnet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	beobachtet	60,6	226,8	410,4	592,0	775,2	941,8
	Differenz	−0,4	+0,1	−0,5	+0,1	−0,1	0,0
Ton 4.	berechnet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	beobachtet	73,8	277,3	501,2	725,2	928,9	—
	Differenz	−0,2	+0,1	−0,2	−0,6	−0,5	—
Ton 3.	berechnet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	beobachtet	94,7	356,9	645,6	907,9	—	—
	Differenz	−0,1	−0,3	−0,2	−0,5	—	—

Röhre IV.

Länge = 1001,0 Mm. Durchmesser = 25,8 Mm.
Wandstärke = 1,1 Mm.

Ton 5.	berechnet	60,2	226,7	409,5	591,5	774,3	940,8
	beobachtet	60,1	226,7	409,8	591,8	775,1	941,5
	Differenz	+0,1	0,0	−0,3	−0,3	−0,8	−0,7
Ton 4.	berechnet	73,5	277,1	500,5	723,9	927,5	—
	beobachtet	74,0	277,7	500,8	724,7	928,0	—
	Differenz	−0,5	−0,6	−0,3	−0,8	−0,5	—
Ton 3.	berechnet	94,5	356,3	644,8	906,5	—	—
	beobachtet	95,2	356,0	645,3	907,1	—	—
	Differenz	−0,7	+0,3	−0,5	−0,6	—	—

Wie aus den angegebenen Zahlen für alle vier Röhren, deren genauere Beschaffenheit bezüglich Länge, Durchmesser und Wandstärke aus der Tabelle selbst ersichtlich ist, hervorgeht, übersteigt die Abweichung der beobachteten Knotenlagen von den nach *Seebecks* Angabe für Stäbe von je derselben Länge berechneten nicht 0,8 Millimeter. Da diese Zahl nur einige Male bei den Beobachtungen erreicht wird, und die Abweichungen meist viel kleiner sind, so glaube ich ohne Weiteres folgern zu dürfen, *dass Röhren von beliebigem Querschnitt, sofern sie in Bezug auf die Längenausdehnung von homogener Beschaffenheit sind, ihre Schwingungsknoten bei transversalem Schwingen an derselben Stelle haben wie die Stäbe.*

Lage der Schwingungsknoten bei Röhren mit gleichmässigem Querschnitt, die mit einer Flüssigkeit gefüllt sind.

Um zu untersuchen, ob durch das Ausfüllen der Röhren mit einer Flüssigkeit eine Veränderung der Knotenlagen hervorgebracht werden würde, verschloss ich dieselben zunächst an beiden Enden mit möglichst dünnen Korkstopfen und prüfte, ob diese Korke eine Abweichung gegen früher hervorbrachten. Da dies aber in Folge ihres äusserst geringen Gewichtes nicht eintrat, so füllte ich die Röhren I, III und IV völlig mit Wasser und dichtete die Verschlusskorke sehr sorgfältig mit Schellackfirniss, so dass kein Tropfen entweichen konnte. Die Korke schlossen gerade mit den Enden der Röhren ab.

Die Beobachtungen ergaben folgende Resultate:

Tabelle IV.

Röhre I.

Ton 5.	berechnet	60,4	227,5	410,9	593,6	777,0	944,1
	beobachtet	60,7	227,8	411,2	593,4	777,0	944,3
	Differenz	−0,3	−0,3	−0,3	+0,2	0,0	−0,2
Ton 4.	berechnet	73,8	278,0	502,2	726,5	930,7	—
	beobachtet	74,6	278,8	502,6	726,5	931,1	—
	Differenz	−0,8	−0,8	−0,4	0,0	−0,4	—
Ton 3.	berechnet	94,8	357,5	647,0	909,7	—	—
	beobachtet	95,2	357,8	647,5	909,4	—	—
	Differenz	−0,4	−0,3	−0,5	+0,3	—	—

Röhre III.

Ton 5.	berechnet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	beobachtet	60,4	227,5	410,6	592,3	775,5	941,7
	Differenz	−0,2	−0,6	−0,7	−0,2	−0,4	+0,1
Ton 4.	berechnet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	beobachtet	74,3	277,9	501,2	724,4	927,5	—
	Differenz	−0,7	−0,5	−0,2	+0,2	+0,9	—
Ton 3.	berechnet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	beobachtet	95,6	356,9	645,2	906,8	—	—
	Differenz	−1,0	−0,3	+0,2	+0,6	—	—

Röhre IV.

Ton 4.	berechnet	73,5	277,1	500,5	723,9	927,5
	beobachtet	74,6	277,1	500,3	722,5	926,6
	Differenz	−1,1	0,0	+0,2	+1,4	+0,9
Ton 3.	berechnet	94,5	356,3	644,8	906,5	—
	beobachtet	95,5	357,5	645,3	905,6	—
	Differenz	−1,0	−1,2	−0,5	+0,9	—

Die bei dieser Untersuchung sich ergebenden Differenzen steigen bis zu 1,4 Millimeter, was vielleicht erklärlich ist, wenn man berücksichtigt, dass wegen des eingeschlossenen Wassers die Röhren jedenfalls nicht mehr so heftig schwingen können als vorher und demnach auch nicht mehr eine so scharfe Bestimmung der Knotenpunkte gestatten. Ausserdem wird auch wohl eine kleine Ungenauigkeit dadurch verursacht, dass die eingeschlossene Wassersäule wegen der verschliessenden Korke nicht völlig so lang ist wie die Röhre selbst. — Trotz dieser nachtheiligen Umstände sind die Unterschiede zwischen der Beobachtung und der Rechnung doch hinreichend klein, um den Schluss zu gestatten, *dass auch Röhren, die mit einer Flüssigkeit gefüllt sind, keine abweichende Lage der Schwingungsknoten zeigen.*

Lage der Schwingungsknoten bei Röhren von nicht gleichmässigem Querschnitt an beiden Enden.

Wie ich schon am Anfang dieser Arbeit erwähnte, stellte ich meine ersten Beobachtungen an Glasröhren an und ging später erst zur Untersuchung der Metallröhren über. Es war nicht die Verschiedenheit des Materials der Grund, welcher mich zu

diesem Wechsel veranlasste, sondern eine Unregelmässigkeit, wenn ich so sagen darf, die mir bei meinen Beobachtungen an den Glasröhren auffiel. — Von dem mir zur Verfügung stehenden Vorrath von Glasröhren hatte ich zu der aufzunehmenden Untersuchung die regelmässigsten ausgesucht und mit der Erwartung die Arbeit begonnen, dass die Knoten der schwingenden Röhren an derselben Stelle liegen würden wie bei entsprechend langen Stäben. Diese Vermuthung bestätigte sich aber nicht vollständig. Die Röhre I, welche ich zuerst untersuchte, zeigte nämlich eine auffallende Verschiebung fast aller Schwingungsknoten nach einer, dem Streichstäbchen abgewandten Seite. Ich war geneigt, besonders weil die Röhre mir etwas dünnwandig erschien, die einseitige Befestigung des Streichstäbchens als Grund der Verschiebung der Knoten anzusehen und befestigte daher auch einmal, um einen etwaigen Einfluss des Streichstäbchens zu constatiren, dasselbe an dem anderen Ende der Röhre. Es zeigte sich in Folge dessen eine noch bedeutendere Verschiebung der Knoten, diesmal nach dem Stäbchen hin, d. h. also nach demselben Ende der Röhre wie vorher. Dass das Streichstäbchen, an dem einen Ende angebracht, bei dieser Röhre einen Einfluss auf die Lage der Schwingungsknoten ausübte, war hierdurch erwiesen, aber ebenso leuchtete mir auch ein, dass noch ein anderer, und zwar noch gewichtigerer Umstand vorhanden sein müsse, der die ursprüngliche Abweichung verursacht hatte; — diesen hatte ich offenbar in der schwingenden Röhre selbst zu suchen. Eine sorgfältige Untersuchung des Querschnitts der Röhre ergab bald, dass dieselbe nicht, wie ich vorausgesetzt hatte, genau cylindrisch und durchweg gleich stark war, sondern sie erwies sich am einen Ende etwas dünner und schwachwandiger als am anderen; diese Verschiedenheit im Kaliber musste wohl die ursprüngliche Verschiebung der Knoten bewirken. Die Beschaffenheit der untersuchten fünf Röhren, welche überhaupt sämmtlich jene Erscheinung zeigten, ergiebt sich aus folgender Tabelle.

Tabelle V.

Röhre No.	Länge. Mm.	Durchmesser. Dick. Ende.	Dünn. Ende.	Diff.	Wandstärke. Dick. Ende.	Dünn. Ende.	Diff.
I.	1549,0	25,3	23,2	2,1	1,8	1,6	0,2
II.	1525,5	21,7	20,4	1,3	0,8	0,7	0,1
III.	1575,5	17,8	16,8	1,0	1,3	1,2	0,1
IV.	1543,0	17,3	15,5	1,8	3,6	2,6	1,0
V.	1322,5	36,3	30,0	6,3	1,9	1,7	0,2

Ich theile nunmehr die Resultate der Beobachtungen in Tabelle VI A mit. Da die Glasröhren etwa 1,5 Meter lang waren, so war es wegen der zu geringen Länge des Massstabes nicht gut möglich auf einmal den Abstand aller Knoten von dem linken Ende, wie bei den früheren Versuchen, zu messen, sondern ich konnte denselben nur von je einem Ende bis zur Mitte bestimmen. Um aber die so erhaltenen Tabellen mit den anderen in Einklang zu bringen, habe ich die Knoten auf der rechten Hälfte der Röhren umgerechnet, so dass in Tabelle VI B der Abstand aller Knotenlagen als von links nach rechts gemessen zu denken ist.

Tabelle VI A.

Röhre I. a. Streichstäbchen am dickeren Ende.

Ton 8.	berechnet	60,2	226,9	410,0	592,3	774,5	592,3	410,0	226,9	60,2
	beobachtet	60,0	225,1	408,2	589,9	772,0	592,4	411,8	229,1	58,8
	Differenz	+0,2	+1,8	+1,8	+2,4	+2,5	−0,1	−1,8	−2,2	+1,4
Ton 7.	berechnet	68,3	257,3	464,7	671,2	671,2	464,7	257,3	68,3	—
	beobachtet	67,5	252,9	462,2	668,8	673,3	466,2	256,8	66,7	—
	Differenz	+0,8	+4,4	+2,5	+2,4	−2,1	−1,5	+0,5	+1,6	—
Ton 6.	berechnet	78,8	296,8	536,3	774,5	536,3	296,8	78,8	—	—
	beobachtet	78,3	294,2	533,5	772,3	538,5	297,0	77,2	—	—
	Differenz	+0,5	+2,6	+2,8	+2,2	−2,2	−0,2	+1,6	—	—
Ton 5.	berechnet	93,1	350,8	633,7	633,7	350,8	93,1	—	—	—
	beobachtet	92,5	348,5	631,3	635,9	352,3	91,8	—	—	—
	Differenz	+0,6	+2,3	+2,4	−2,2	−1,5	+1,3	—	—	—
Ton 4.	berechnet	113,8	428,8	774,5	428,8	113,8	—	—	—	—
	beobachtet	112,8	426,5	773,8	427,5	111,4	—	—	—	—
	Differenz	+1,0	+2,3	+0,7	+1,3	+2,4	—	—	—	—

Röhre I b.

Streichstäbchen am dünneren Ende.

Ton 8.	berechnet	60,2	226,9	410,0	592,3	774,5	592,3	410,0	226,9	60,2
	beobachtet	60,9	231,4	416,5	599,0	776,5	585,5	405,5	220,8	55,2
	Differenz	−0,7	−4,5	−6,5	−6,7	−2,0	+6,8	+4,5	+6,1	+5,0
Ton 7.	berechnet	68,3	257,3	464,7	671,2	671,2	464,7	257,3	68,3	—
	beobachtet	68,7	261,8	470,7	677,2	667,3	461,7	253,8	65,8	—
	Differenz	−0,4	−4,5	−6,0	−6,0	+3,9	+3,0	+3,5	+2,5	—
Ton 6.	berechnet	78,8	296,8	536,3	774,5	536,3	296,8	78,8	—	—
	beobachtet	79,3	301,2	542,8	777,2	534,0	294,4	76,9	—	—
	Differenz	−0,5	−4,4	−6,5	−2,7	+2,3	+2,4	+1,9	—	—
Ton 5.	berechnet	93,1	350,8	633,7	633,7	350,8	93,1	—	—	—
	beobachtet	94,4	354,7	639,5	626,5	346,2	90,6	—	—	—
	Differenz	−1,3	−3,9	−5,8	+7,2	+4,6	+2,5	—	—	—
Ton 4.	berechnet	113,8	428,8	774,5	428,8	113,8	—	—	—	—
	beobachtet	113,8	431,7	781,0	422,0	108,5	—	—	—	—
	Differenz	0,0	−2,9	−6,5	+6,8	+5,3	—	—	—	—

Röhre II.

Streichstäbchen am dünneren Ende.

Ton 7.	berechnet	67,2	253,3	457,5	660,8	660,8	457,5	253,3	67,2
	beobachtet	67,9	256,2	463,0	667,2	653,8	451,3	248,0	64,3
	Differenz	−0,7	−2,9	−5,5	−6,4	+7,0	+6,2	+5,3	+2,9
Ton 6.	berechnet	77,6	292,2	528,0	762,8	528,0	292,2	77,6	—
	beobachtet	77,4	295,3	533,5	770,5	521,5	286,8	75,7	—
	Differenz	+0,2	−3,1	−5,5	−7,7	+6,5	+5,4	+1,9	—
Ton 5.	berechnet	93,0	345,5	623,9	623,9	345,5	93,0	—	—
	beobachtet	92,4	349,1	629,7	619,8	342,5	94,2	—	—
	Differenz	+0,6	−3,6	−5,8	+4,1	+3,0	−1,2	—	—
Ton 4.	berechnet	112,0	422,1	762,8	422,1	112,0	—	—	—
	beobachtet	111,1	427,2	771,0	417,5	107,0	—	—	—
	Differenz	+0,9	−5,1	−8,2	+4,6	+5,0	—	—	—

Röhre III.

Ton 8.	berechnet	61,1	230,8	417,0	602,5	787,8	602,5	417,0	230,8	61,1
	beobachtet	63,1	238,1	421,0	608,9	794,0	595,0	410,8	227,6	59,2
	Differenz	−2,0	−7,3	−4,0	−6,4	−6,2	+7,5	+6,8	+3,2	+1,9
Ton 7.	berechnet	69,4	261,7	472,7	682,7	682,7	472,7	261,7	69,4	—
	beobachtet	70,8	264,2	476,7	687,5	678,7	468,4	259,2	67,2	—
	Differenz	−1,4	−2,5	−4,0	−4,8	+4,0	+4,3	+2,5	+2,2	—
Ton 6.	berechnet	80,1	301,9	545,4	787,8	545,4	301,9	80,1	—	—
	beobachtet	83,0	304,8	549,8	793,5	541,7	299,1	79,6	—	—
	Differenz	−2,9	−2,9	−4,4	−5,7	+3,7	+2,8	+0,5	—	—
Ton 5.	berechnet	94,7	356,9	644,5	644,5	356,9	94,7	—	—	—
	beobachtet	96,0	361,9	650,4	639,5	353,2	91,3	—	—	—
	Differenz	−1,3	−5,0	−5,9	+5,0	+3,7	+3,4	—	—	—
Ton 4.	berechnet	115,6	436,1	787,8	436,1	115,6	—	—	—	—
	beobachtet	116,2	439,5	793,0	432,7	114,2	—	—	—	—
	Differenz	− 0,6	−3,4	−5,2	+3,4	+1,4	—	—	—	—

Röhre IV.

Ton 8.	berechnet	60,0	226,0	408,4	590,0	771,5	590,0	408,4	226,0	60,0
	beobachtet	61,4	234,0	417,8	600,0	785,0	581,7	402,6	220,4	59,1
	Differenz	−1,4	−8,0	−9,4	−10,0	−13,5	+8,3	+5,8	+5,6	+0,9
Ton 7.	berechnet	68,0	256,3	462,9	668,6	668,6	462,9	256,3	68,0	—
	beobachtet	68,8	259,8	469,9	678,6	659,7	454,5	250,4	66,8	—
	Differenz	−0,8	−3,5	−7,0	−10,0	+8,9	+8,4	+5,9	+1,2	—
Ton 6.	berechnet	78,4	295,6	534,2	771,5	534,2	295,6	78,4	—	—
	beobachtet	78,7	300,9	542,9	782,0	527,4	289,2	76,5	—	—
	Differenz	−0,3	−5,3	−8,7	−10,5	+6,8	+6,4	+1,9	—	—
Ton 5.	berechnet	92,6	349,5	631,2	631,2	349,5	92,6	—	—	—
	beobachtet	96,1	355,0	642,8	622,8	340,7	90,2	—	—	—
	Differenz	−3,5	−5,5	−11,6	+8,4	+8,8	+2,4	—	—	—
Ton 4.	berechnet	113,3	427,1	771,5	427,1	113,3	—	—	—	—
	beobachtet	114,6	433,2	780,3	420,6	111,2	—	—	—	—
	Differenz	−1,3	−6,1	−8,8	+6,5	+2,1	—	—	—	—

Röhre V.

Ton 4.	berechnet	97,1	366,1	661,2	366,1	97,1
	beobachtet	96,8	374,3	674,8	354,8	93,9
	Differenz	+0,3	−8,2	−13,6	+11,3	+3,2
Ton 3.	berechnet	124,8	470,5	470,5	124,8	—
	beobachtet	127,8	481,0	459,2	120,6	—
	Differenz	−3,0	−10,5	+11,3	+4,2	—
Ton 2.	berechnet	174,7	661,2	174,7	—	—
	beobachtet	177,4	672,0	170,3	—	—
	Differenz	−2,7	−10,8	+4,4	—	—

Tabelle VI B.

Röhre I a. Streichstäbchen am dickeren Ende.

Ton 8.	berechn.	60,2	226,9	410,0	592,3	774,5	956,7	1139,0	1322,1	1488,8
	beob.	60,0	225,1	408,2	589,9	772,0	956,6	1137,2	1319,9	1490,2
	Differenz	+0,2	+1,8	+1,8	+2,4	+2,5	+0,1	+1,8	+2,2	−1,4
Ton 7.	berechn.	68,3	257,3	464,7	671,2	877,8	1084,3	1291,7	1480,7	—
	beob.	67,5	252,9	462,2	668.8	875,7	1082,8	1292,2	1482,3	—
	Differenz	+0,8	+4,4	+2,5	+2,4	+2,1	+1,5	−0,5	−1,6	—
Ton 6.	berechn.	78,8	296,8	536,3	774,5	1012,7	1252,2	1470,2	—	—
	beob.	78,3	294,2	533,5	772,3	1010,5	1252,0	1471,8	—	—
	Differenz	+0,5	+2,6	+2,8	+2,2	+2,2	+0,2	−1,6	—	—
Ton 5.	berechn.	93,1	350,8	633,7	915,3	1198,2	1455,9	—	—	—
	beob.	92,5	348,5	631,3	913,1	1196,7	1457,2	—	—	—
	Differenz	+0,6	+2,3	+2,4	+2,2	+1,5	−1,3	—	—	—
Ton 4.	berechn.	113,8	428,8	774,5	1120,2	1435,2	—	—	—	—
	beob.	112,8	426,5	773,8	1121,5	1437,6	—	—	—	—
	Differenz	+1,0	+2,3	+0,7	−1,3	−2,4	—	—	—	—

Röhre I b.

Streichstäbchen am dünneren Ende.

Ton 8.	berechn.	60,2	226,9	410,0	592,3	774,5	956,7	1139,0	1322,1	1488,8
	beob.	60,9	231,4	416,5	599,0	776,5	963,5	1143,5	1328,2	1493,8
	Differenz	−0,7	−4,5	−6,5	−6,7	−2,0	−6,8	−4,5	−6,1	−5,0
Ton 7.	berechn.	68,3	257,3	464,7	671,2	877,8	1084,3	1291,7	1480,7	—
	beob.	68,7	261,8	470,7	677,2	881,7	1087,3	1295,2	1483,2	—
	Differenz	−0,4	−4,5	−6,0	−6,0	−3,9	−3,0	−3,5	−2,5	—
Ton 6.	berechn.	78,8	296,8	536,3	774,5	1012,7	1252,2	1470,2	—	—
	beob.	79,3	301,2	542,8	777,2	1015,0	1254,6	1472,1	—	—
	Differenz	−0,5	−4,4	−6,5	−2,7	−2,3	−2,4	−1,9	—	—
Ton 5.	berechn.	93,1	350,8	633,7	915,3	1198,2	1455,9	—	—	—
	beob.	94,4	354,7	639,5	922,5	1202,8	1458,4	—	—	—
	Differenz	−1,3	−3,9	−5,8	−7,2	−4,6	−2,5	—	—	—
Ton 4.	berechn.	113,8	428,8	774,5	1120,2	1435,2	—	—	—	—
	beob.	113,8	431,7	781,0	1127,0	1440,5	—	—	—	—
	Differenz	0,0	−2,9	−6,5	−6,8	−5,3	—	—	—	—

Röhre II.

Ton 7.	berechn.	67,2	253,3	457,5	660,8	864,7	1068,0	1272,2	1458,3
	beob.	67,9	256,2	463,0	667,2	871,7	1074,2	1277,5	1461,2
	Differenz	−0,7	−2,9	−5,5	−6,4	−7,0	−6,2	−5,3	−2,9
Ton 6.	berechn.	77,6	292,2	528,0	762,8	997,5	1233,3	1447,9	—
	beob.	77,4	295,3	533,5	770,5	1004,0	1238,7	1449,8	—
	Differenz	+0,2	−3,1	−5,5	−7,7	−6,5	−5,4	−1,9	—
Ton 5.	berechn.	93,0	345,5	623,9	901,6	1180,0	1432,5	—	—
	beob.	92,4	349,1	629,7	905,7	1183,0	1431,3	—	—
	Differenz	+0,6	−3,6	−5,8	−4,1	−3,0	+1,2	—	—
Ton 4.	berechn.	112,0	422,1	762,8	1103,4	1413,5	—	—	—
	beob.	111,1	427,2	771,0	1108,0	1418,5	—	—	—
	Differenz	+0,9	−5,1	−8,2	−4,6	−5,0	—	—	—

Röhre III.

Ton 8.	berechn.	61,1	230,8	417,0	602,5	787,8	973,0	1158,5	1344,7	1514,4
	beob.	63,1	238,1	421,0	608,9	794,0	980,5	1164,7	1347,9	1516,3
	Differenz	−2,0	−7,3	−4,0	−6,4	−6,2	−7,5	−6,2	−3,2	−1,9
Ton 7.	berechn.	69,4	261,7	472,7	682,7	892,8	1102,8	1313,8	1506,1	—
	beob.	70,8	264,2	476,7	687,5	896,8	1107,1	1316,3	1508,3	—
	Differenz	−1,4	−2,5	−4,0	−4,8	−4,0	−4,3	−2,5	−2,2	—
Ton 6.	berechn.	80,1	301,9	545,4	787,8	1030,1	1273,6	1495,4	—	—
	beob.	83,0	304,8	549,8	793,5	1033,8	1276,4	1495,9	—	—
	Differenz	−2,9	−2,9	−4,4	−5,7	−3,7	−2,8	−0,5	—	—
Ton 5.	berechn.	94,7	356,9	644,5	931,0	1218,6	1480,8	—	—	—
	beob.	96,0	361,9	650,4	936,0	1222,3	1484,2	—	—	—
	Differenz	−1,3	−5,0	−5,9	−5,0	−3,7	−3,4	—	—	—
Pon 4.	berechn.	115,6	436,1	787,8	1139,4	1459,9	—	—	—	—
	beob.	116,2	439,5	793,0	1142,8	1461,3	—	—	—	—
	Differenz	−0,6	−3,4	−5,2	−3,4	−1,4	—	—	—	—

Röhre IV.

Ton 8.	berechn.	60,0	226,0	408,4	590,0	771,5	953,0	1134,6	1317,0	1483,0
	beob.	61,4	234,0	417,8	600,0	785,0	961,3	1140,4	1322,6	1483,9
	Differenz	—1,4	— 8,0	—9,4	—10,0	—13,5	—8,3	—5,8	—5,6	—0,9
Ton 7.	berechn.	68,0	256,3	462,9	668,6	874,4	1080,1	1286,7	1475,0	—
	beob.	68,8	259,8	469,9	678,6	883,3	1088,5	1292,6	1476,2	—
	Differenz	—0,8	—3,5	—7,0	—10,0	—8,9	—8,4	—5,9	—1,2	—
Ton 6.	berechn.	78 4	295,6	534,2	771,5	1008,8	1247,4	1464,6	—	—
	beob.	78,7	300,9	542,9	782,0	1015,6	1253,8	1466,3	—	—
	Differenz	—0,3	—5,3	—8,7	—10,5	—6,8	— 6,4	—1,7	—	—
Ton 5.	berechn.	92,6	349,5	631,2	911,8	1193,5	1450,4	—	—	—
	beob.	96,1	355,0	642,8	920,2	1202,3	1452,8	—	—	—
	Differenz	— 3,5	— 5,5	—11,6	—8,4	—8,8	—2,4	—	—	—
Ton 4.	berechn.	113,3	427,1	771,5	1115,9	1429,7	—	—	—	—
	beob.	114,6	433,2	780,3	1122,4	1431,8	—	—	—	—
	Differenz	—1,3	—6,1	—8,8	—6,5	—2,1	—	—	—	—

Röhre V.

Ton 4.	berechnet	97,1	366,1	661,2	956,4	1225,4
	beobachtet	96,8	374,3	674,8	967,7	1228,6
	Differenz	+0,3	—8,2	—13,6	—11,3	—3,2
Ton 3.	berechnet	124,8	470,5	852,0	1197,7	—
	beobachtet	127,8	481,0	863,3	1201,9	—
	Differenz	—3,0	— 10,5	—11,3	—4,2	—
Ton 2.	berechnet	174,7	661,2	1147,8	—	—
	beobachtet	177,4	672,0	1152,2	—	—
	Differenz	—2,7	—10,8	—4,4	—	—

Es ergiebt sich nun zunächst aus diesen Beobachtungen, *dass alle Schwingungsknoten nach dem dünneren Ende hin verschoben sind und zwar so, dass diese Verschiebung am bedeutendsten bei den mittleren, am geringsten bei den den Enden zunächst gelegenen Knoten erscheint.* Ferner ist bald ersichtlich, *dass die Grösse der Verschiebung nicht bei allen Röhren gleich bedeutend ist, sondern dass bei denjenigen Röhren, welche die bedeutendsten Differenzen entweder zwischen den an beiden Enden gemessenen Wandstärken oder zwischen ihren entsprechenden Durchmessern zeigen, auch die grössten Abweichungen der beobachteten gegen die berechneten Knotenlagen vorkommen.* Diese Erscheinungen zeigen sich am auffallendsten bei den Röhren IV und V, sie treten am schwächsten bei den Röhren II und III auf.

Um über den eigentlichen Grund der Verschiebung der Knoten sowie über den Einfluss des Streichstäbchens ein Urtheil zu haben, bleiben nun noch zwei Versuche zu betrachten, einmal, wie die Schwingungsknoten bei einem *conischen Stabe* liegen, und dann, welchen Einfluss bei einer Röhre eine einseitig angebrachte Belastung hat.

Lage der Schwingungsknoten bei einem Stab von conischer Form.

Zur Beobachtung der Art der Verschiebung, welche die Schwingungsknoten bei einem conischen Stabe gegen die eines cylindrischen Stabes von derselben Länge erleiden, liess ich von dem hiesigen Universitätsmechaniker *Engel* einen Messingstab von 602 Millimeter Länge so abdrehen, dass der Durchmesser am einen Ende 12 Millimeter, der an dem anderen dagegen 9 Millimeter betrug und bestimmte die Knotenpunkte. Das Streichstäbchen befand sich bei dem Versuche am dickeren Ende; die Abstände der Knoten in folgender Tabelle wurden von dem dünneren Ende aus gemessen.

Tabelle VII.

	Stab.	Entfernung der Knoten vom dünneren Ende.					
Ton 5.	cylindrisch	36,2	136,4	246,3	355,7	465,6	565,8
	conisch	35,1	130,8	238,4	348,5	461,3	565,2
	Differenz	1,1	5,6	7,9	7,2	4,3	0,6
Ton 4.	cylindrisch	44,2	166,6	301,0	435,4	557,8	—
	conisch	43,6	161,7	293,5	431,5	557,0	—
	Differenz	0,6	4,9	7,5	3,9	0,8	—
Ton 3.	cylindrisch	56,8	214,3	387,7	545,2	—	—
	conisch	56,3	209,5	384,0	544,6	—	—
	Differenz	0,5	4,8	3,7	0,6	—	—

Der Versuch zeigt zunächst, *dass die Schwingungsknoten sämmtlich nach dem dünneren Ende verschoben sind*, dann aber auch, *dass die Grösse der Verschiebung nicht bei allen Knoten dieselbe ist. Sie ist bei den mittleren am bedeutendsten und nimmt von da aus gleichmässig gegen beide Enden ab* [16]).

16) Ein entsprechendes Resultat erhält Dr. *Vogel* bei Betrachtung eines keilförmigen Stabes, nur zeigen bei ihm die beiden, den Enden zunächst gelegenen Knoten, grössere Abweichungen. Vergl. *Fr. Vogel*, Transversalschwingungen eines keilförmigen Stabes. Inaug.-Diss. Berlin. 1881.

Dieselbe Erscheinung trat theilweise noch in auffallenderer Weise hervor bei der Untersuchung der Glasröhren (Tab. II), bei welchen die Verschiebung der mittleren Knoten in zwei Fällen (bei Röhre IV und V) sogar 13 Millimeter überstieg. Conische Röhren folgen also auch hierin den entsprechend gestalteten Stäben.

Es lässt sich nun ferner aus den oben beobachteten Erscheinungen folgern, *dass die Schwingungsknoten um so weiter aus ihrer eigentlichen Lage verschoben werden, je grösser der Unterschied der beiden Enden von einander ist.* Während bei einem Stabe nur einfach die beiden festen Durchmesser ausschlaggebend sind, ist es klar, dass bei Röhren (insbesondere wird dies eben bei Glasröhren zu berücksichtigen sein) zwei Verhältnisse mitsprechen, nämlich das der (äusseren) Durchmesser an beiden Enden, und das der diesen entsprechenden Wandstärken zu einander; je verschiedener Beide von einander sind, eine um so bedeutendere Verschiebung der Schwingungsknoten muss stattfinden.

Dass in den Tabellen VI bei den Glasröhren die Abnahme der Verschiebungen nach beiden Enden hin nicht ganz gleichmässig erfolgen, sondern dass auf der rechten Seite, woselbst sich stets das Streichstäbchen befindet, die Differenzen durchgängig grösser sind als auf der linken, ist dem Einfluss des Streichstäbchens zuzuschreiben, der noch im nächsten Abschnitt zu besprechen bleibt.

Ueber den Einfluss einer einseitig angebrachten Belastung auf die Lage der Schwingungsknoten bei Röhren. — Einfluss des Streichstäbchens.

Während bei den schwingenden Metallröhren die beobachteten Schwingungsknoten durchgehends mit sehr befriedigender Genauigkeit mit den berechneten zusammenfielen, traten bei der Untersuchung der Glasröhren Erscheinungen auf, welche es wünschenswerth machten, den Einfluss des verwendeten Streichstäbchens auf die Lage des Knoten näher kennen zu lernen. Dass ein solcher wirklich vorhanden war, zeigte das Verhalten der Röhre I (cf. Tab. VI a und b), und in Folge dessen fühlte ich mich veranlasst zu prüfen, nach welcher Richtung die Schwingungsknoten durch ein am einen Ende angebrachtes Uebergewicht verschoben werden, und ferner, wie klein das betreffende gewählt

werden muss, damit es nur noch eine Verschiebung der Schwingungsknoten hervorrufe, welche wegen ihrer Kleinheit als nicht vorhanden angesehen werden darf.

Um demnach vor Allem die durch eine einseitig angebrachte Belastung bewirkte Veränderung in der Lage der Schwingungsknoten festzustellen, liess ich mir von dem Mechaniker ein cylindrisches Gewicht auf das eine Ende der Messingröhre III fest aufpassen. — Das Streichstäbchen war bei diesen Beobachtungen an dem unbelasteten Ende angebracht und befand sich, entgegen der früheren Anordnung, diesmal auf der linken Seite der Röhre, da das Uebergewicht auf der rechten angebracht war.

Durch den Versuch ergab sich, dass in Folge der Belastung alle Schwingungsknoten sich dem belasteten Ende näherten und zwar um so mehr, je näher sie demselben lagen. Da indessen das angebrachte Uebergewicht (= 53 Gramm) im Verhältniss zu dem Gewicht der Röhre (= 407 Gramm) sehr gross war, und ich ausserdem noch den Einfluss des bei allen Versuchen angewendeten Streichstäbchens feststellen wollte, liess ich mir das Uebergewicht allmählig leichter machen, wodurch sich die Verschiebungen der Knoten verminderten. Die hierbei beobachteten Erscheinungen habe ich in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle VIII A.

Röhre III. Gewicht = 406,8 gr.
Abstand der Knoten vom unbelasteten Ende.

Belastung p = 53 gr.						
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4
	belastet	75,7	289,5	522,5	756,4	975,8
	Differenz	—2,1	—12,1	—21,5	—31,8	—47,4
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—
	belastet	98,6	374,5	677,9	961,5	—
	Differenz	—4,0	—17,9	—32,5	—54,1	—
Belastung p = 20 gr.						
Ton 5.	unbelastet	60,2	226;9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	61,1	232,8	418,0	607,1	794,7	969,1
	Differenz	—0,9	—5,9	—8,1	—15,0	—19,6	—27,3
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	75,3	285,0	515,2	744,9	957,6	—
	Differenz	—1,7	—7,6	—14,2	—20,3	—29,2	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	97,3	367,9	666,0	938,5	—	—
	Differenz	—2,7	—11,3	—20,6	—31,1	—	—

Belastung p = 7,5 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	60,7	228,8	415,9	599,6	784,7	954,2
	Differenz	−0,5	−1,9	−6,0	−7,5	−9,6	−12,4
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	73,9	281,2	508,0	734,4	941,8	—
	Differenz	−0,3	−3,8	−7,0	−9,8	−13,4	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	95,8	361,4	654,8	921,2	—	—
	Differenz	−1,2	−4,8	−9,4	−13,8	—	—

Belastung p = 5,1 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	60,4	229,0	413,5	597,2	782,0	950,5
	Differenz	−0,2	−2,1	−3,6	−5,1	−6,9	−8,7
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	73,6	279,6	505,7	731,6	937,7	—
	Differenz	0,0	−2,2	−4,7	−7,0	−9,3	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	95,3	360,0	652,2	916,8	—	—
	Differenz	−0,7	−3,4	−6,8	−9,4	—	—

Belastung p = 3,0 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	60,0	227,6	412,2	594,8	778,3	946,6
	Differenz	+0,2	−0,7	−2,3	−2,7	−3,2	−4,8
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	73,2	278,0	503,3	728,5	933,6	—
	Differenz	+0,4	−0,6	−2,2	−3,9	−5,2	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	94,9	358,5	649,1	913,0	—	—
	Differenz	−0,3	−1,9	−3,7	−5,6	—	—

Belastung p = 2,1 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	60,0	227,4	411,2	593,5	777,3	944,4
	Differenz	+0,2	−0,5	−1,3	−1,4	−2,2	−2,6
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	73,2	278,4	502,5	727,2	931,5	—
	Differenz	+0,4	−1,0	−1,5	−2,6	−3,1	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	94,6	357,8	647,9	910,8	—	—
	Differenz	0,0	−1,2	−2,5	−3,4	—	—

Belastung p = 1,0 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,2	226,9	409,9	592,1	775,1	941,8
	belastet	59,9	227,2	409,9	591,9	775,4	942,6
	Differenz	+0,3	−0,3	0,0	+0,2	−0,3	−0,8
Ton 4.	unbelastet	73,6	277,4	501,0	724,6	928,4	—
	belastet	73,1	277,0	501,1	725,6	929,4	—
	Differenz	+0,5	+0,4	−0,1	−1,0	−1,0	—
Ton 3.	unbelastet	94,6	356,6	645,4	907,4	—	—
	belastet	94,3	356,9	645,8	908,5	—	—
	Differenz	+0,3	−0,3	−0,4	−1,1	—	—

Während bei der Belastung mit 53 Gramm die Maximalabweichung beim dritten Oberton 54 Millimeter nach dem Gewicht hin beträgt, geht dieselbe bei der Belastung mit 20 Gramm auf 31 Millimeter herab; bei dem vierten und fünften Oberton ist sie geringer, weil hier die einzelnen Knoten näher zusammenliegen. Bei einem drei Gramm schweren Uebergewicht ist in Bezug auf die von demselben entfernter liegenden Schwingungsknoten eine grössere Abweichung nicht mehr bemerkbar, und schliesslich lässt sich bei einer Belastung von einem Gramm auf der einen Seite nur noch eine Abweichung von etwa einem Millimeter an dem einen ihr zunächst gelegenen Schwingungsknoten bemerken. Die anderen Knoten liegen wieder an ihrer ursprünglichen Stelle.

Da das bei der Untersuchung verwendete Streichstäbchen nur 0,49 Gramm wiegt, so könnte es demzufolge, wenn überhaupt, so doch nur einen Ausschlag von weniger als einem Millimeter an dem ihm zunächst gelegenen Knoten hervorbringen, welcher indess als zu klein vielleicht vernachlässigt werden dürfte. In der That ist auch die Annahme eines Einflusses des Streichstäbchens bei diesem Versuche nicht gerechtfertigt, denn die sich in der Tabelle ergebenden Abweichungen der Knoten voneinander sind zu verschwindend, um überhaupt berücksichtigt zu werden.

Bei der leichteren und zugleich dünneren Röhre I zeigten sich folgende Verschiebungen der Knoten in Folge der Belastung des einen Endes.

Tabelle VIII B.

Röhre I. Gewicht = 314,3 gr.

Abstand der Knoten vom unbelasteten Ende.

Belastung p = 2,1 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,4	227,5	410,9	593,6	777,0	944,1
	belastet	59,9	227,9	412,4	596,1	780,7	949,2
	Differenz	+0,5	−0,4	−1,5	−2,5	−3,7	−5,1
Ton 4.	unbelastet	73,8	278,0	502,2	726,5	930,7	—
	belastet	73,4	278,5	504,5	730,1	935,8	—
	Differenz	+0,4	−0,5	−2,3	−3,6	−5,1	—
Ton 3.	unbelastet	94,8	357,5	647,0	909,7	—	—
	belastet	95,0	358,1	650,1	915,0	—	—
	Differenz	−0,2	−0,6	−3,1	−5,3	—	—

Belastung p = 1,0 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,4	227,5	410,9	593,6	777,0	944,1
	belastet	59,8	226,8	411,3	594,0	778,1	946,1
	Differenz	+0,6	+0,7	−0,4	−0,4	−1,1	−2,0
Ton 4.	unbelastet	73,8	278,0	502,2	726,5	930,7	—
	belastet	73,5	277,7	502,7	727,8	932,7	—
	Differenz	+0,3	+0,3	−0,5	−1,3	−2,0	—
Ton 3.	unbelastet	94,8	357,5	647,0	909,7	—	—
	belastet	94,6	357,1	648,1	911,6	—	—
	Differenz	+0,2	+0,4	−1,1	−1,9	—	—

Belastung p = 0,5 gr.

Ton 5.	unbelastet	60,4	227,5	410,9	593,6	777,0	944,1
	belastet	59,9	227,1	410,5	593,3	776,7	944,6
	Differenz	+0,5	+0,4	+0,4	+0,3	+0,3	−0,5
Ton 4.	unbelastet	73,8	278,0	502,2	726,5	930,7	—
	belastet	73,2	278,3	502,0	726,4	931,1	—
	Differenz	+0,6	−0,3	+0,2	+0,1	−0,4	—
Ton 3.	unbelastet	94,8	357,5	647,0	909,7	—	—
	belastet	94,2	357,2	646,8	909,8	—	—
	Differenz	+0,6	+0,3	+0,2	−0,1	—	—

Hierbei bringt ein Gramm Mehrbelastung auf einer Seite der Röhre noch eine Verschiebung von zwei Millimeter an den äussersten Schwingungsknoten hervor, hingegen bleibt eine Belastung von einem halben Gramm scheinbar völlig wirkungslos. Ein Einfluss des bei diesem Versuche angewendeten Streichstäb-

chens, dessen Gewicht 0,25 Gramm beträgt und welches sich auf der unbelasteten (linken) Seite der Röhre befindet, ist ebenfalls schwerlich anzunehmen, es sei denn, dass man hierher die fast durchgängig auftretende, sehr geringe Verschiebung des äussersten linken Knotens nach dem Ende rechnen wollte.

In Folge dieser Versuche ist man zu der Annahme berechtigt, *dass bei nicht allzulangen und zu leichten Röhren das Streichstäbchen, wenn es ein Gewicht von einem Gramm nicht erreicht, keine zu berücksichtigende Veränderung der Lage der Schwingungsknoten hervorrujt. Bei längeren Röhren, besonders wenn dieselben nur eine geringe Wandstärke haben, wie dies bei den Glasröhren I und II der Fall ist, macht sich das Streichstäbchen bemerkbar, indem es eine geringe nach ihm hingehende Verschiebung der ihm zunächst liegenden Schwingungsknoten verursacht, eine Erscheinung, die sich bei den genannten Röhren in Tabelle VI zeigt, da hier die am rechten Ende befindlichen Knotenpunkte durchgängig demselben näher liegen als die entsprechenden am linken.*

Dass im Allgemeinen bei den Versuchen mit Glasröhren die beobachteten Differenzen grössere Schwankungen aufweisen als dies bei den Metallröhren vorkommt, ist wohl als eine Folge der unregelmässigen inneren Ausbildung derselben anzusehen und bedarf deshalb keiner weiteren Berücksichtigung.

Die oben besprochenen Erscheinungen wiederholen sich, wenn man beide Enden einer Röhre beschwert, wie ich es im Laufe der Untersuchung bei Glasröhre II gethan, indem ich sie beiderseitig mit Korkstopfen von je 0,62 Gramm verschloss; das bei dem Versuche angewendete Streichstäbchen wog 0,73 Gramm. Es ergaben sich folgende Knotenlagen, welche ich mit den aus Tabelle VI B entnommenen, für die unbelastete Röhre gefundenen Lagen der Schwingungsknoten vergleichen will.

Tabelle IX.

Ton 6.	unbelastet	77,4	295,3	533,5	770,5	1004,0	1238,7	1449,8
	belastet	74,4	294,0	535,0	773,5	1009,0	1244,5	1459,4
	Differenz	+3,0	+1,3	−1,5	−3,0	−5,0	−5,8	−9,6
Ton 5.	unbelastet	92,4	349,1	629,7	905,7	1183,0	1431,3	—
	belastet	89,0	348,3	632,7	912,5	1191,0	1444,3	—
	Differenz	+3,4	+0,8	−3,0	−6,8	−8,0	−13,0	—
Ton 4.	unbelastet	111,1	427,2	771,0	1108,0	1418,5	—	—
	belastet	109,0	430,5	774,0	1118,0	1427,6	—	—
	Differenz	+2,1	−3,3	−3,0	−10,0	−9,1	—	—

Da die Röhre nur eine Wandstärke von 0,8, bezw. 0,7, und eine Länge von 1525,5 Millimeter hat, so sind die angebrachten Uebergewichte noch von merklichem Einfluss. Dieselben äussern sich durch Verschieben der Schwingungsknoten nach beiden Enden. Während auf der linken Seite die Abweichung der Knoten von ihrer ursprünglichen Lage nur einige Millimeter beträgt, ist sie auf der rechten Seite viel bedeutender, weil eben hier sich noch das Streichstäbchen befindet, so dass die Gesammtbelastung an dem rechten Ende ein Gewicht von 1,35 Gramm erreicht.

Ueber die Tonhöhe der Stäbe.

Zugleich mit der Bestimmung der Knotenpunkte hat auch *Seebeck* in seiner Abhandlung eine Formel angegeben, die zur Berechnung der Tonhöhe für die verschiedenen Obertöne schwingender Stäbe dient. Dieselbe hat die Form:

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2 L^2} \sqrt{\frac{a g}{p}},$$

und es ist darin, wenn sie für *parallelepipedische* Stäbe gelten soll, $a = \frac{E b h^3}{12}$, für *cylindrische* Stäbe aber $a = \frac{E r^4 \pi}{4}$ zu setzen [17]). Demnach wird für letztere:

$$N = \frac{\varepsilon^2 r^2 \pi}{4 L^2} \sqrt{\frac{E \pi g}{p}},$$

und wenn man berücksichtigt, dass das Gewicht der Längeneinheit $p = r^2 \pi s$ ist, schliesslich

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 L^2} \sqrt{\frac{E g}{s}}$$ [18]).

In dieser Formel bezeichnet E den Elasticitätsmodulus (in Kilogrammen), g die Beschleunigung durch die Schwere, s das specifische Gewicht, L die Länge des Stabes und r den Radius desselben. Bei der Berechnung ist die Zahl g in Millimetern, L und r in Metern auszudrücken. Die Grösse ε hat für jeden Oberton einen anderen Werth und ergiebt sich für frei = freie Stäbe aus der Tabelle I, nämlich:

---

[17]) Vergl. Abhandl. d. K. S. Ges. d. W. I, 152 u. 135.

[18]) Vergl. *Melde*, Akustik, pag. 140.

Oberton	ε
1.	1,50562
2.	2,49975
3.	3,50001
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$n.$	$\frac{2n+1}{2}$.

Da zufolge der Formel die Schwingungszahlen der Obertöne desselben Stabes dem Quadrate von ε proportional sind, und von dem dritten an $\varepsilon = \frac{2n+1}{2}$ ist, so verhält sich für den dritten, vierten und fünften Oberton

$$N_3 : N_4 : N_5 = \varepsilon^2_3 : \varepsilon^2_4 : \varepsilon^2_5 = 3{,}5^2 : 4{,}5^2 : 5{,}5^2 = 7^2 : 9^2 : 11^2$$
$$= 1 : 1{,}65 : 2{,}47.$$

Dieses Verhältniss muss auch bei den experimentell bestimmten Schwingungszahlen obwalten, und kann demgemäss zur Controlle für die Richtigkeit der Tonhöhebestimmungen verwendet werden.

Es war nun zunächst zu prüfen, wie die von mir experimentell gefundenen Schwingungszahlen der Töne von Stäben mit den berechneten übereinstimmten. Zu diesem Zwecke benutzte ich zwei runde Messingstäbe von der Länge $L = 1{,}002$ Meter und der Dicke $2R = 18{,}10$ bezw. $2r = 15{,}95$ Millimeter. Die Tonhöhe derselben wurde mit Hilfe des im hiesigen mathematisch-physikalischen Institut befindlichen Stossapparates von *Appunn* in Hanau bestimmt zu:

$$N_3 = 304,\ N_4 = 504,\ N_5 = 744$$
bezw. $n_3 = 264,\ n_4 = 440,\ n_5 = 656$

Schwingungen, welche Zahlen in folgendem Verhältniss stehen:

$$N_3 : N_4 : N_5 = 304 : 504 : 744 = 1 : 1{,}66 : 2{,}45$$
bezw. $n_3 : n_4 : n_5 = 264 : 440 : 656 = 1 : 1{,}67 : 2{,}48.$

Nimmt man mit *Weisbach*[19]) den Elasticitätsmodulus für gezogenes Messing zu 9870, ferner $s = 8{,}4$ und $g = 9810$ an, so liefert die *Seebeck*'sche Formel für obige drei Obertöne die Schwingungszahlen

$$N_3 = 294,\ N_4 = 487,\ N_5 = 727,$$

19) *Weisbach*, Lehrbuch der theoret. Mechanik. 5. Aufl. pag. 416.

bezw. $n_3 = 260$, $n_4 = 429$, $n_5 = 641$,

mit welchen die beobachteten genügend übereinstimmen dürften, wenn man berücksichtigt, dass die Werthe für s und E nicht speciell für die Stäbe bestimmt sind. Auch das Verhältniss der beobachteten Schwingungszahlen weicht nicht bedeutend von dem gegebenen ab.

Die Tonhöhe der Röhren im Vergleich zu derjenigen der Stäbe.

Um die Gültigkeit der oben angegebenen *Seebeck*'schen Formel für die Tonhöhe bei Röhren zu prüfen, benutzte ich die schon im ersten Theile dieser Arbeit verwendeten Messingröhren I, III und IV, deren Dimensionen folgende sind:

	Länge.	Durchmesser der äusseren Fläche.	Wandstärke.
Röhre I.	1,0045 m.	11,2 mm.	1,3 mm.
Röhre III.	1,002 m.	18,4 mm.	0,9 mm.
Röhre IV.	1,001 m.	25,8 mm.	1,1 mm.

Die experimentelle Bestimmung der Tonhöhen ergab die Zahlen:

	Ton 3.	Ton 4.	Ton 5.
Röhre I.	244	400	604
Röhre III.	416	680	1016
Röhre IV.	592	960	1440,

welche zu einander in dem Verhältniss stehen von:

Röhre I. $244 : 400 : 604 = 1 : 1{,}64 : 2{,}47$
Röhre III. $416 : 680 : 1016 = 1 : 1{,}64 : 2{,}44$
Röhre IV. $592 : 960 : 1440 = 1 : 1{,}63 : 2{,}43$.

Vergleicht man nun die Tonhöhe der Röhren mit der von Stäben derselben Länge und Dicke, so bemerkt man sofort, dass dieselbe bei jenen bedeutend höher ausfällt als bei diesen. Der erste der Stäbe, deren Tonhöhe ich oben bestimmte, hat mit der Röhre III ziemlich genau dieselben äusseren Dimensionen, seine Tonhöhe bleibt aber gegen die der Röhre weit zurück. Stäbe, welche genau dieselben äusseren Dimensionen haben wie die untersuchten Röhren, würden im Vergleich mit diesen folgende Tonhöhen liefern:

	Ton 3.	Ton 4.	Ton 5.
Röhre I. beobachtet.	244.	400.	604.
Stab. berechnet.	176.	292.	435.
Röhre III. beobachtet.	416.	680.	1016.
Stab. berechnet.	288.	476.	712.
Röhre IV. beobachtet.	592.	960.	1440.
Stab. berechnet.	402.	664.	992.

Noch grösser wird der Unterschied ausfallen, wenn man die Tonhöhe der Röhren derjenigen von Stäben vom Radius der inneren Fläche gegenüberstellt, denn dünnere Stäbe liefern überhaupt tiefere Töne. — Zwischen Stäben und Röhren scheint demgemäss bezüglich der Tonhöhen kein einfaches Verhältniss zu bestehen.

Ueber die Abhängigkeit der Tonhöhe von den Dimensionen der Röhre.

Nach dem eben gefundenen Resultat bleibt nunmehr noch zu untersuchen, wie die Tonhöhe der Röhren von deren äusseren Dimensionen, speciell von ihrem *Querschnitt* abhängt, denn dass die Schwingungszahlen, wie bei den Stäben, dem Quadrate der Länge umgekehrt proportional sind, unterliegt wohl keinem Zweifel.

Die Röhren, welche ich zu dieser Prüfung benutzte, waren speciell zu diesem Zwecke in Berlin von der schon oben erwähnten Firma angefertigt worden und hatten folgende Dimensionen:

	Länge.	Durchmesser der äusseren Fläche.	Wandstärke.
Röhre V.	1,000 m.	15,0 mm.	1,0 mm.
Röhre VI.	1,000 m.	15,0 mm.	2,0 mm.
Röhre VII.	1,000 m.	20,0 mm.	1,0 mm.

Die experimentelle Bestimmung der Tonhöhen ergab die Schwingungszahlen:

	Ton 3.	Ton 4.	Ton 5.
Röhre V.	340.	560.	830.
Röhre VI.	320.	524.	776.
Röhre VII.	463.	760.	1120,

welche in dem Verhältniss stehen von:

Röhre V. 340 : 560 : 830 = 1 : 1,65 : 2,44
Röhre VI. 320 : 524 : 776 = 1 : 1,64 : 2,43
Röhre VII. 463 : 760 : 1120 = 1 : 1,64 : 2,42.

Vergleicht man nun die Röhre V einerseits mit VI, andererseits mit VII, so lassen sich folgende zwei Sätze aufstellen:

1) *Von zwei Röhren, welche gleiche äussere Durchmesser, aber verschiedene Wandstärken haben, giebt diejenige mit der stärkeren Wandung einen tieferen Ton.*

2) *Haben zwei Röhren gleiche Wandstärke, aber verschiedene Durchmesser, so liefert die weitere Röhre auch den höheren Ton.*

Dieses letztere Resultat erinnert an das Verhalten der *Stäbe*, welche einen um so höheren Ton liefern, je dicker sie sind; ob indess bei Voraussetzung gleicher Wandstärke die Schwingungszahl der Röhren, wie bei jenen, proportional dem äusseren Durchmesser ist, lässt sich durch diesen einen Versuch noch nicht entscheiden und würde jedenfalls eine grössere Anzahl von Bestimmungen erfordern.

Ueber den Werth der Grösse ε bei den Röhren.

Wie schon oben bemerkt, ist ε eine Grösse, welche je nach der Ordnungszahl des zu betrachtenden Tones einen ganz bestimmten Werth besitzt. Da nun die Röhren für entsprechende Töne andere Schwingungszahlen liefern als gleich lange Stäbe von demselben Durchmesser, so fragt es sich, ob diese Verschiedenheit von einer etwaigen Aenderung des ε hervorgerufen wird.

Von dem dritten Oberton an verhalten sich bei den Stäben nach der von *Seebeck* aufgestellten Formel die Schwingungszahlen der verschiedenen Obertöne wie die Quadrate der zugehörigen Grössen ε. Nun bleibt aber bei allen von mir geprüften Röhren dieses Verhältniss dasselbe wie bei jenen, sogar in dem Falle, dass die Röhren mit irgend einer Flüssigkeit angefüllt sind, (wie sich aus der folgenden Betrachtung ergeben wird), weshalb ich mich zu der Annahme berechtigt glaube, *dass auch bei den Röhren die Zahl ε denselben Werth besitzt wie bei den Stäben, und dass also die grössere Schwingungszahl der Röhren lediglich durch die Querschnittsverhältnisse derselben bedingt wird.* Kennt man demnach einen bestimmten Oberton einer Röhre, so kann man mit Hilfe von ε die Tonhöhen der anderen mit angehender Genauigkeit berechnen.

Ueber die Tonhöhe einer mit verschiedenen Flüssigkeiten angefüllten Röhre.

Es ist eine schon seit einigen Jahren durch Dr. *C. Müller* [20]) erwiesene Thatsache, dass, wenn man poröse Stäbe mit irgend einer Flüssigkeit tränkt, die Tonhöhe derselben merklich erniedrigt wird und es liegt daher die Frage nahe, ob Röhren, angefüllt mit einer Flüssigkeit, dasselbe Verhalten zeigen.

Um dieses zu untersuchen, verschloss ich die Röhre III beiderseits mit möglichst dünnen Korkstopfen, welche, wie eine Prüfung ergab, eine merkliche Aenderung in der Tonhöhe nicht bewirkten. Sodann füllte ich sie mit Alkohol, ferner mit Leinöl und mit Wasser, in Folge dessen sich folgende Tonhöhen ergaben.

Röhre III.	*N*3	*N*4	*N*5	Verhältniss.
leer.	424	688	1024	1 : 1,62 : 2,42.
mit Alkohol.	356	582	860	1 : 1,64 : 2,42.
mit Leinöl.	352	572	848	1 : 1,63 : 2,41.
mit Wasser.	344	568	840	1 : 1,65 : 2,44.

In derselben Weise fiel das Resultat dieses Versuchs mit anderen Röhren aus. Es geht daraus hervor, *dass analog dem oben erwähnten Verhalten poröser Stäbe, durch Einfüllen von Flüssigkeiten die Tonhöhe der Röhren vermindert wird, und zwar am wenigsten durch Alkohol, mehr durch Oel und am meisten durch Wasser;* ferner *dass dieses Verfahren ein neues elastisches System liefert, welches genau dieselben Gesetze befolgt wie Röhren bezw. Stäbe.* — Gleichzeitig ist zu bemerken, dass die Töne in Folge des Einfüllens der Flüssigkeiten an sich dumpfer werden und sich nicht mehr so scharf bestimmen lassen wie bei leeren Röhren.

---

20) Pogg. Ann. CLV. 481—526.

Endergebnisse der Untersuchung.

1) Bei einer Röhre, auch wenn sie mit einer beliebigen Flüssigkeit angefüllt ist, liegen die Schwingungsknoten für denselben Oberton an derselben Stelle wie bei einem Stab von gleicher Länge.
2) Röhren liefern bedeutend höhere Töne als Stäbe von denselben Dimensionen.
3) Bei Voraussetzung gleicher Wandstärke liefern dickere Röhren höhere Töne; sind dagegen die Durchmesser zweier Röhren gleich, so giebt diejenige mit der schwächeren Wandung den höheren Ton.
4) Der Werth des ε ist bei den Röhren derselbe wie bei den Stäben.
5) Wenn die Röhren ganz mit einer Flüssigkeit gefüllt werden, so wird die Tonhöhe derselben erniedrigt, und zwar durch eine specifisch schwerere Flüssigkeit mehr als durch eine leichtere.

Die vorstehende Arbeit wurde während der Zeit meiner Thätigkeit als Assistent am mathematisch-physikalischen Institut der hiesigen Universität begonnen und im Sommer-Semester 1883 zu Ende geführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht dem Director des genannten Institutes, Herrn Prof. Dr. *Melde* für die mir gewährte freundliche Unterstützung sowie für die Bereitwilligkeit, mit welcher er mir das zu der Untersuchung erforderliche Material zur Verfügung stellte, meinen besten Dank auszusprechen.